EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

III — 1 NOVEMBER 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

SYSTEMATIC USE OF APPLICATIONS IN MATHEMATICS TEACHING

by

ARTHUR ENGEL

Stuttgart

Mathematics cannot be divided into pure mathematics and applied mathematics. There is only mathematics and its applications outside of mathematics. The applications are important for several reasons.

a) The student needs motivation and intuitive support for abstract ideas.

b) The applications provide a criterion for the selection of those topics which should be taught in school.

c) Society supports mathematics not because it is beautiful but because it is useful.

We easily forget that our students, with very few exceptions, will not become professional mathematicians. But many will become scientists and will use mathematics as a tool. Hence the subjects we teach should have wide applications. There is no place for sterile theories which are cultivated because of their "inherent beauty". We are mostly lotus eaters, but we should not expect a majority of the population to share our taste. We can do much harm to a future scientist by trying to imitate Bourbaki. Instead we should ourselves be a little bit of a scientist. Otherwise we cannot apply mathematics.

There is no time to develop a branch of mathematics and then apply it. Besides the student expects immediate and convincing results. For this reason we must start with an applied problem. This problem should have a wide range of significant applications. In trying to solve it we develop an important branch of mathematics. If for some branch of mathematics there are no convincing applications, this branch of mathematics should not be taught.

The most important subjects from an applied point of view are: calculus, linear algebra and geometry, probability and statistics, computers. These topics should be treated extensively. They must be integrated into one coherent course. All of them must start as early as possible, if necessary at different levels of rigor. Probability

and statistics is useful for more people than any other branch of mathematics. It can and should be taught during the whole school time starting at the age of 10-11 years. At two previous ICMI-seminars (Echternach 1965 and Vienna 1966) I showed how this could be done. Intuitive calculus should be treated as early as computational skills permit it, say at the age of 15—16 years. This is an old subject and its most efficient treatment is well known. The two other topics (especially computers) will require a lot of hard thinking and experimentation.

At the moment I am aiming at a systematic use of applications for all grades of the secondary school. The rest of this paper is devoted to a detailed exposition of a small but important subject from a radically applied point of view. This means all important ideas are suggested by applications.

The German high school or gymnasium extends from grade 5 to grade 13 (age 10/11 to 18/19). The number of weekly mathematic lessons for these grades are 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3. When I take over a class for the last three years of high school, the students know already powers with rational exponents. The curriculum prescribes to continue with the following topics: the functions exp and log, the geometric series, the number e, the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

To prepare the ground for these topics, the student gets in six hours a thorough treatment of the function concept and of functional notation. This short course closes with the proof of an important theorem: $f(x) = cx$ is the only monotonic solution of the functional equation

$$f(x+h) = f(x) + f(h) \tag{1}$$

This theorem and its proof will be needed later on several occasions. Besides it is the best antidote against foolish mistakes of the type $\sqrt{4+9} = 2 + 3$.

The next four hours are devoted to a short course in probability, which consists of a mathematical theory of coin tossing. This is sufficient for the construction of stochastic models. Of course it is possible to construct stochastic models even if the student has never heard of probability. One simply talks about fractions or proportions and derives what happens to large numbers of individuals.

We give a short summary of the probability course. The two sides of a coin are labelled 0 and 1. Coin tossing generates strings of

binary digits. To the outcomes 0 and 1 we assign weights $q \geqq 0$ and $p \geqq 0$ such that $p + q = 1$. The weight assignment to strings of digits is made by the "multiplication law", for instance 01101001 $\rightarrow qppqpqqp$. By the interpretation

0 $\rightarrow$ one step to the right
1 $\rightarrow$ one step upward

strings of binary digits are mapped on paths in the plane lattice starting at the origin. (Figure 1.) There are $\binom{n}{x}$ paths from the origin to the point $(n - x, x)$ and each has weight $p^x q^{n-x}$. Hence the binomial distribution

$$b(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

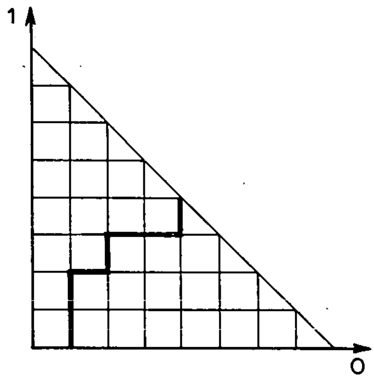


Fig. 1. The path 01101001.

After these preliminaries we start with an example which has two virtues. It has a tremendeous number of significant applications. And it leads to the discovery of all the topics that were mentioned above. Besides, a substantial part of the concepts and tools of calculus make their first appearance.

A young man takes a vacation and goes fishing. Fishing consists largely of waiting for a fish to bite. The waiting time can be any nonnegative real number and it depends upon chance. To get a deterministic process we consider a large number N of fishermen and we assume that a fisherman leaves as soon as he has caught a fish. We denote by $E(t)$ the proportion of fishermen who catch no fish in the time interval $[0, t]$. Then the number of fisherman at the beach is decaying and after t seconds only $N \cdot E(t)$ are left. We want to find the function E. To determine E we have to make plausible

assumptions (axioms) about fishing. Different assumptions will generally lead to different functions E.

The students make a dozen proposals. Good ones and bad ones. Some are contradictory, some are dependent or even equivalent. Let us quote some good ones: There are many fish in the lake, the fishermen do not influence each other, the chance of catching a fish does not depend upon the number already caught. Waiting is not rewarded. A fisherman who has just arrived has a good as chance of catching a fish in the next second as he who has been waiting for many hours without success. From these proposals we select two alternative axiom systems which turn out to be equivalent.

A1. *Independence.* $E(t)$ does not depend on N.
A2. *Stationarity.* The origin of time is irrelevant.

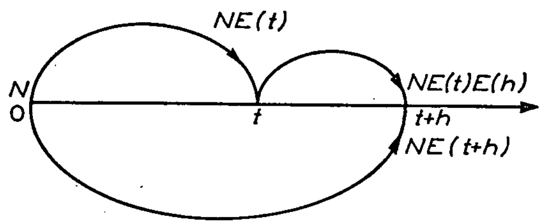


Fig. 2.

In other words the fishermen do not influence each other and the fishing process does not change with time. We compare the transitions $0 \to t \to t + h$ with the direct transition $0 \to t + h$ (Figure 2). The application of the two axioms leads immediately to the functional equation

$$E(t + h) = E(t) \cdot E(h) \tag{2}$$

A. The number of fishermen decreases in equal time intervals by equal proportions.

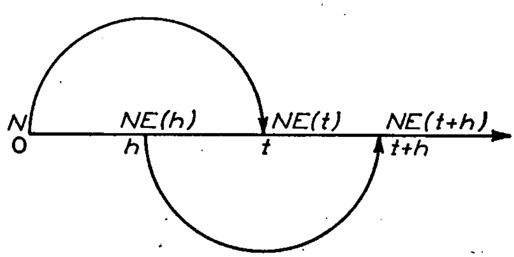


Fig. 3.

The application of this single axiom to the equal time intervals $[0, t]$ and $[h, t + h]$ in Figure 3 leads to

$$\frac{NE(t)}{N} = \frac{NE(t+h)}{NE(h)} \quad \text{or} \quad E(t+h) = E(t) \cdot E(h)$$

Now we must invent or discover a function with the property (2). An unknown function is a black box (Figure 4). It accepts inputs and generates from them outputs. E is an operator which transforms inputs into outputs. The student cannot be expected to find by himself what kinds of inputs he should use to gain from (2) information

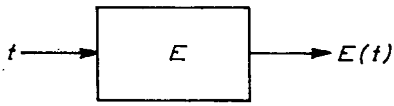


Fig. 4.

in systematic and efficient manner. He must be given the appropriate input tape which he should feed into the box (functional equation). Fortunately the solution of (2) presents no difficulties since the method is identical with that of solving functional equation (1). We sketch the well known solution (with small gaps). From (2) we get by induction

$$E(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = E(t_1)E(t_2) \ldots E(t_n).$$

Let $E(1) = a$. If we put $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1/n$, we get

$$E(1) = a = \left[E\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \quad \text{or} \quad E\left(\frac{1}{n}\right) = a^{(1/n)}.$$

If we put $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1/m$, we get

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = a^{(n/m)}.$$

So far we have been discovering properties of E. Now we must do some inventing. We cannot get to irrationals without an additional assumption about E. Physical considerations suggest monotonicity. By monotonicity the function E is easily extended from rationals to irrationals and we have now for all real t

$$E(t) = a^t$$

It is easy to give a host of formally identical or isomorphic situations, satisfying our axioms.

a) Radioactive decay. b) Money in the bank increases in equal time intervals by equal proportions. c) Unlimited Malthusian growth of biological populations.

The variable t can also be interpreted as a space variable. Suppose our fisherman dives into the lake. He will observe that it gets darker and darker with increasing depth. Let $E(x)$ be the dimming factor. Students propose two axioms for light absorption.

1. In passing through a layer of an absorbing medium the intensity of output is proportional to the intensity of input.

2. Light does not get tired. Absorption depends only on the thickness of the layer penetrated but not on its location in the absorbing medium.

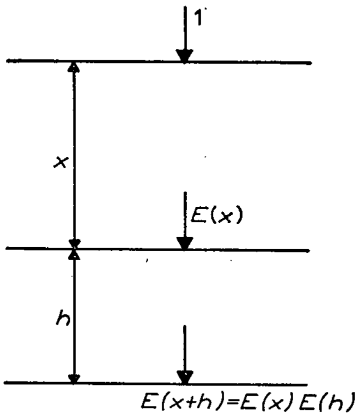


Fig. 5.

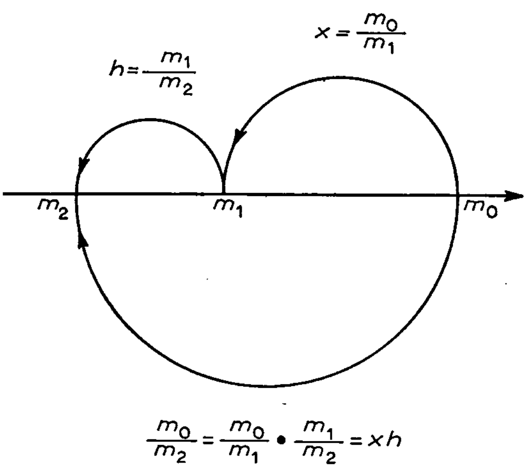


Fig. 6.

These are obviously space analogs of A1 and A2. Figure 5 shows how these axioms lead to functional equation (2) with solution

$$E(x) = a^x.$$

For computational reasons we postpone experiments. Instead we turn immediately to the inverse function E^{-1}. This function is discovered by an applied problem. Some boys are interested in rockets and know something about this subject. Suppose a rocket in space has initial mass m_0. By a transition

$$\text{state } m_0 \to \text{state } m_1$$

it gains velocity. On what does the velocity-increment L depend? If you ask this question you get the answer: on the mass ratio $x = m_0/m_1$. Now we compare the transitions

$$m_0 \to m_1 \to m_2$$

with the direct transition $m_0 \to m_2$. From Figure 6 we read off the functional equation

$$L(xh) = L(x) + L(h). \tag{3}$$

It is easy to give many similar examples which all lead to the functional equation (3). And it is trivial to show that the inverse of an E-function is an L-function and vice versa.

One more example leading to (3). I want to define the amount $I(n)$ of information which I gain if I am told the result of a random experiment with n equiprobable outcomes. It is natural to require that $I(n)$ should be an increasing function of n. Suppose that in addition I learn the result of a second experiment with m equiprobable outcomes. I want information to be additive. The total information from both experiments is then $I(m) + I(n)$. But the two experiments can also be regarded as one compound experiment with mn equiprobable outcomes. Hence the total information should also be $I(mn)$. This means $I(n)$ is an increasing function satisfying

$$I(mn) = I(m)+I(n), \quad \text{which is (3).}$$

Now we must link the functional equation (3) with the hyperbola $y = 1/x$. This can be done in a very simple way. Instead of the global behavior we look at the local behavior of the rocket. Suppose the rocket has mass m and velocity v (Figure 7). A gunshot by an astronaut changes the state of the rocket as indicated in Figure 8. Here Δv is the velocity increment of the rocket and Δm and c are mass and velocity of the bullet.

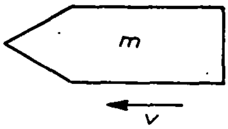


Fig. 7.

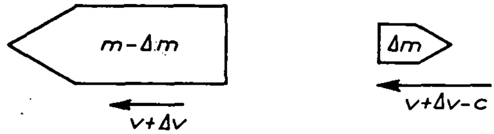


Fig. 8.

Since momentum is conserved we get

$$mv = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v + \Delta v - c)$$
$$\text{or} \quad m\,\Delta v = c\,\Delta m$$
$$\text{or} \quad \Delta v = \Delta m\; c/m.$$

Δv is obviously the shaded rectangle under the hyperbola $m \to c/m$ in Figure 9. If the astronaut fires five shots the velocity increment is the sum of the five rectangles in Figure 9. If instead the rocket motor is burning the bullets are gas molecules of negligible mass Δm. Hence the transition $m_0 \to m_e$ leads to a velocity increment equal to the area under the hyperbola from m_0 to m_e. So we come to suspect that the functional equation (3) is valid for areas under the hyperbola $y = c/x$.

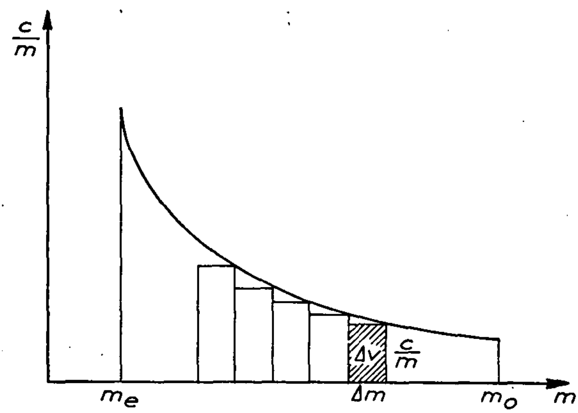


Fig. 9.

From now on the further development is completely standard and I only indicate the successive steps.

1) The function ln is defined by Figure 10
   and $\ln(xh) = \ln x + \ln h$ is proved.

2) The number e is defined by $\ln e = 1$.

3) The function exp is defined by $\exp = \ln^{-1}$.

4) $E(x) = e^{x\lambda}$ and $L(x) = c \ln x$ are proved to be the only monotonic solutions of (2) and (3).

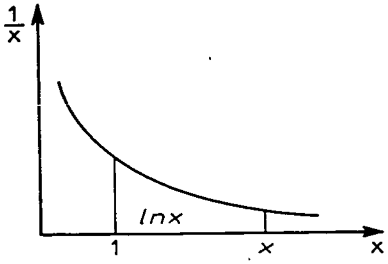


Fig. 10.

Indeed by (2) and (3) we have

$$\ln \circ E(x+h) = \ln \circ E(x) + \ln \circ E(h).$$

Putting $f = \ln \circ E$ we get

$$f(x+h) = f(x) + f(h)$$

and f is also monotonic. Hence by (1)

$$f(x) = \lambda x, \ \ln \circ E(x) = \lambda x, \ E(x) = e^{\lambda x}.$$

Similarly one proves $L(x) = c \ln x$.

Of decisive importance are the local approximations of ln and exp by linear functions. Figure 11 shows

$$\frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h \qquad \text{for } |h| < 1$$

Because of $h/1 + h = h - h^2/1 + h$ we have for $h \to 0$

$$\ln(1+h) = h + 0(h^2) \tag{4}$$

From $\ln(1+h) < h$ and $\ln(1-h) < -h$ we get by inverting

$$1 + h < e^h \text{ and } 1 - h < e^{-h} \text{ or } e^h < \frac{1}{1-h} = 1 + h + \frac{h^2}{1-h}.$$

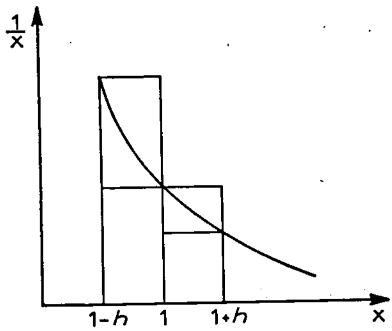


Fig. 11.

Hence

$$e^h = 1 + h + 0(h^2) \tag{5}$$

We mostly use the weaker versions

$$\ln(1+h) = h + o(h) \tag{6}$$

$$e^h = 1 + h + o(h) \tag{7}$$

Only for the proof of the central limit theorem the stronger versions (4) and (5) are needed. If we apply (6) and (7) to

$$\ln(x + h) = \ln x\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad \text{and } e^{x+h} = e^x e^h$$

we get

$$\ln(x + h) = \ln x + \frac{h}{x} + o(h) \tag{8}$$

$$e^{x+h} = e^x + h e^x + o(h) \tag{9}$$

We are now in a very strong position. We know how to calculate values of the functions ln and exp. This entitles us to use tables of these functions. The linear approximations (8) and (9) make it possible to define concepts and to solve problems which really belong to calculus. We now return to applications which are the main source for new meaningful concepts and new inspiration. Let us go back to fishing. We know that $E(t) = e^{-\lambda t}$ is the proportion of fishermen still waiting after t seconds, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ is the proportion of fishermen who got a fish. $F(t)$ is an increasing function with $F(0) = 0$ and $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Hence $F(t)$ can be interpreted as a distribution of a unit mass on the positive t-axis. The total mass left of t is $F(t)$ and the mass on the interval $[t, t + h]$ is $F(t + h) - F(t)$. By means of (9) we get

$$F(t + h) - F(t) = \lambda e^{-\lambda t} h + o(h)$$

The mass on a unit interval at t is

$$\frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \lambda e^{-\lambda t} + \frac{o(h)}{h}.$$

This approaches $\lambda e^{-\lambda t}$ if $h \to o$. For this reason we call $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ the density of the distribution $F(t)$. Now a physical interpretation of λ can be given. At time t there are $N e^{-\lambda t}$, fisherman at the beach. In the short time interval $[t, t + h]$, $N[F(t + h) - F(t)] = N[\lambda e^{\lambda - t} h + o(h)]$ catch a fish and leave. Hence the number of fish

caught by one man in one second is $\lambda + o(h)/h$. This goes to λ for $h \to o$. Hence λ is simply the intensity or rate of arrival of the fish, i.e. the average number of fish caught at one fishing place in one second.

Fishing by a coin. Fishing is a continuous process. We shall discover important new results if we try an approximation by a discrete process. I want to simulate the waiting for a fish by tossing a coin at the rate of once per second. The two sides of the coin are labeled 0 and 1 (Figure 12). As soon as 1 appears I have caught a fish. To

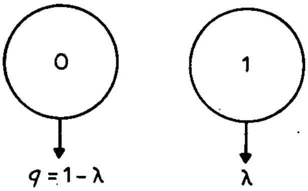


Fig. 12.

guarantee an average of λ fish per second we assume probability λ for 1 and $q = 1 - \lambda$ for 0. Coin tossing does satisfy our axioms A1 and A2. Because the coin has no memory, past and future are independent. Moreover the coin does not change with time. There is but one difference. With a coin a fish can only be caught at the end of a second. This should cause no serious error since a second is a very short time in fishing.

Table 1.

outcome	waiting time	weight
1	1	λ
01	2	λq
001	3	λq^2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\underbrace{00\ldots01}_{n}$	n	λq^{n-1}
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Table 1 shows the possible outcomes of my fishing game with corresponding weights (probabilities). The weights should sum to 1. But the sum $\lambda + \lambda q + \lambda q^2 + \lambda q^3 + \ldots$ has infinitely many terms

and is not yet defined. Here we are forced to invent geometric series. Having developed the necessary mathematical background we find

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda q^{n-1} = \frac{\lambda}{1-q} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

as it should be.

What is the mean waiting time?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (nq^{n-1} - nq^n) = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

Of course this is no surprise.

We discover another useful result if we pass from the discrete process to the corresponding continuous process. First we toss our coin at the rate of n per second. The probability of outcome 1 is changed to λ/n to keep the arrival rate λ fish/sec fixed (Figure 13).

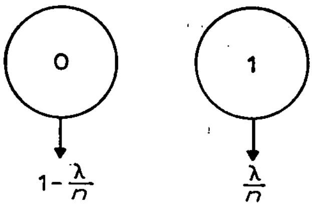


Fig. 13.

The waiting time is $> t$ sec if I get nt zeros in a row.
The probability for this event is

$$p_n(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nt}$$

By letting $n \to \infty$ we should get the continuous fishing process. Hence we expect

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) = e^{-\lambda t}$$

This can be shown easily by (8).
On taking logarithms we get

$$\ln p_n(t) = nt \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = nt\left[-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\lambda t + o\left(\frac{1}{n}\right) : \frac{1}{n}.$$

For $n \to \infty$ $\quad \ln p_n(t) \to -\lambda t$ $\quad$ and $\quad p_n(t) \to e^{-\lambda t}$.

This proves the important result

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

We have now found all the results specified by the curriculum. But we need more practice. In textbooks one finds long series of unmotivated problems for drill purposes. There is no reason why the student should solve any unmotivated problems. He can get enough practice by solving problems with useful and interesting results. Problems which prepare for calculus are especially valuable. In fact this whole course serves as a prelude to calculus. I give some examples of meaningful problems.

1) The mean waiting time for the discrete fishing process is $1/\lambda$. What is the corresponding value for the continuous process? Let us call T the total waiting time for all N fishermen. The number of fishermen still waiting at time t is $N\ e^{-\lambda t}$. By intuitive considerations it is easy to see that T is simply the area under the graph of $t \to N\ e^{-\lambda t}$ (Figure 14). An upper sum for this area is

$$\sum_{n=0}^{\infty} hNe^{-\lambda nh} = \frac{hN}{1-e^{-\lambda h}} = \frac{hN}{1-1+\lambda h+o(h)} = \frac{N}{\lambda+o(h)/h} \to \frac{N}{\lambda} = T$$

for $h \to 0$. Hence $\dfrac{T}{N} = \dfrac{1}{\lambda}$.

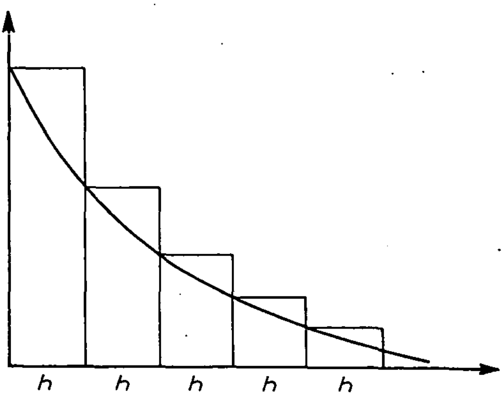


Fig. 14.

Again this is no surprise. The discrete and the continuous model give the same result.

2) Relation between density $f(t) = \lambda\ e^{-\lambda t}$ and distribution $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Let us graph the density $f(t)$ (Figure 14). Intuitive considerations suggest that the area under $f(t)$ from 0 to t

should be equal to $F(t)$. Let us check this. We partition $[0, t]$ into n equal intervals of length $h = t/n$. An upper sum for the area is

$$\sum_{r=1}^{n} h\lambda e^{-\lambda hr} = \lambda h \frac{1 - e^{-\lambda nh}}{1 - e^{-\lambda h}} = \lambda h \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - 1 + \lambda h + o(h)} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 + o(h)/h} \to F(t)$$

for h $\to$ 0.

3) There are many processes in the real world which approximately satisfy the axioms of the fishing process (the purely random stationary process or Poisson process). The students compare observational results with theoretical predictions. The numerical results are either given to the student or he gets the numbers by his own observations. Later when the Poisson distribution is available more interesting examples can be studied. We mention just a few experiments.

a) Do cars arrive like fish? Two students, each armed with a stopwatch, record the gaps between passing cars on the autobahn when the traffic is not too heavy. They estimate the parameter λ by

$$\lambda = \frac{\text{total number of cars}}{\text{total time}}.$$

The proportion of gaps $> t$ seconds should be $e^{-\lambda t}$. The agreement between theoretical and empirical distribution is generally excellent. But if the traffic is heavy the cars cannot overtake freely and the axiom of independence breaks down.

b) A spool of thread is torn into pieces by a constant heavy load. The thread snaps at an imperfection. We want to test whether imperfections are distributed at random along the thread. λ is estimated by

$$\lambda = \frac{\text{number of pieces}}{\text{total length of thread}}$$

Again there is reasonable agreement between theoretical and empirical results.

c) The students read a book and study the gaps between successive occurrences of the word "or". Does the word "or" arrive like fish? The axioms A1 and A2 are presumably satisfied. In writing a book an author does not pay any attention to the word "or". Nor does his predilection for this word change during the writing of the book. This assures independence and stationarity.

If there is discrepancy between theory and observation we must look for reasons. Which axiom is violated and why?

Now and then the students should be confronted by big problems which lead to extensive developments. The next two problems belong to this category.

4 *Simple Queues.*

On the beach there is a fishing place. Customers (fishermen) arrive at this place one at a time and at random with an average rate of λ/sec. They are served (catch a fish) one at a time and at an average rate of μ/sec. The result of problem 1) shows that $1/\lambda$ is the mean interarrival time and $1/\mu$ is the mean service time. A queue is forming. We will say the queue is in state n if there are n customers in the queue including the one who is being served. If $\lambda > \mu$ the queue will obviously grow indefinitely. Now suppose $\lambda < \mu$. We want to study the fluctuation of this queue as time goes on. Instead

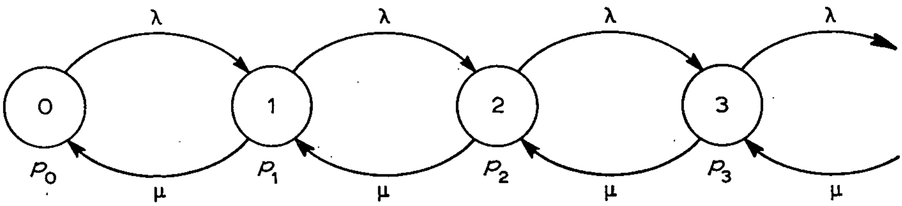


Fig. 15.

of considering just this queue alone we consider a large number N of identical queues. Let $p_0, p_1, p_2, p_2, \ldots$ be the proportions of the queues which are in state 0, 1, 2, 3, ... Customers are continually coming and going and the corresponding queues make transitions to neighboring states. The whole process can be visualized by the network flow diagram in Figure 15. The proportions $p_0, p_1, p_2, \ldots$ are functions of time. But if the flow in the network has been in progress for a long time a steady state is approached and the p_i become independent of time. I do not prove this, but I first make it plausible

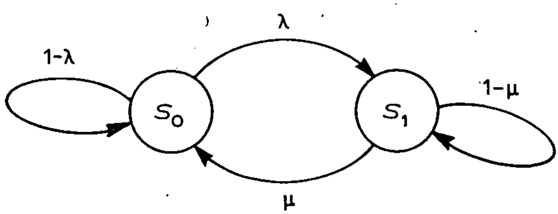


Fig. 16.

by intuitive considerations. Then I prove it for the simple case of a two state discrete time Markov chain. Such a chain is a sort of a mixing machine. Suppose "stuff" of total mass 1 is initially distributed at two places S_0 and S_1. At S_0 there is p_0 and at S_1 $q_0 = 1 - p_0$. At the end of each second the proportion λ of the stuff in S_0 flows to S_1 and the proportion μ of the stuff in S_1 flows to S_0 (Figure 16). After n seconds we have the quantity p_n at S_0 and $q_n = 1 - p_n$ at S_1. After n + 1 seconds we have at S_0

$$p_{n+1} = (1 - \lambda)p_n + \mu(1 - p_n) = (1 - \lambda - \mu)p_n + \mu$$

If we put $1 - \lambda - \mu = a$, $1 - a = \lambda + \mu$, then $|a| < 1$. Repeated substitution yields

$$p_n = a^n p_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)\mu = a^n p_0 + \mu\frac{1 - a^n}{1 - a}$$

or $p_n = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + a^n\left(p_0 - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$ and $q_n = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - a^n\left(p_0 - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$

The distribution of stuff at the two places approaches very rapidly the steady state $p = \mu/(\lambda + \mu)$, $q = \lambda/(\lambda + \mu)$, which is independent of the initial distribution. To get the steady state distribution one simply writes down the balance equation inflow = outflow for one state. For state S_0 this yields

$$\mu(1 - p) = \lambda p \quad \text{or} \quad p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

We will assume that the same thing happens in Figure 15 and we will draw conclusions from this assumption. The balance equations for the steady state can be written down by inspection of Figure 15 and solved sequentially:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \varrho p_0,$$

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{mean service time}}{\text{mean interarrival time}}$$

$$(\lambda + \mu)p_1 = \mu p_2 + \lambda p_0 \Rightarrow p_2 = \varrho^2 p_0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

By induction

$$(\lambda + \mu)p_{n-1} = \mu p_n + \lambda p_{n-2} \Rightarrow p_n = \varrho^n p_0.$$

The proportions must sum to 1. Hence

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 \varrho^n = \frac{p_0}{1-\varrho} \Rightarrow p_0 = 1 - \varrho$$

$$p_n = (1-\varrho)\varrho^n \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

From (10) we can deduce the average queue length

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \varrho \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\varrho)\varrho^{n-1} = \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

Since $1/\mu$ is the mean service time, a customer who just arrives finds before him on the average $\varrho/(1-\varrho)$ customers and so his mean waiting time until being served is $1/\mu \, \varrho/(1-\varrho)$. His waiting + service time is

$$\frac{1}{\mu}\frac{\varrho}{1-\varrho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)}.$$

The case $\lambda = \mu$ or $\varrho = 1$ is especially interesting and contrary to naive expectation. As $\varrho \to 1$ queue length and waiting time grow rapidly and lead to a bottleneck. A numerical example is very instructive. At a waiting-room of a doctor patients arrive at a rate of 1 in 10 minutes and they are treated at a rate of 1 in 9 minutes. Since $\lambda = 1/10$, $\mu = 1/9$, $\varrho = 9/10$ the average queue is 9, while the doctor has $1 - \varrho = 1/10$ of the day for rest. This is an intolerable situation. If the service time is reduced to 8 minutes the average queue length drops to 4. This is a reasonable number though fluctuations are enormous. By an appointment system which guarantees arrival at regular intervals the average queue length can be cut in half. By means of this simple model we can gain a lot of insight about the behavior of queues and we can even draw some useful conclusions.

To prevent misconceptions let us stress that the individual queues continue to fluctuate wildly and do not approach any steady state. The steady state refers to a large number N of similar queues.

5) *Axiomatic Derivation of the Error Law* (*Herschel*).

Sometimes, but by no means always, the construction of a mathematical model proceeds in four steps.

a) Observation
b) Mathematization
c) Deduction
d) Application.

We illustrate this procedure by a detailed example.

a) *Observation*

There were two brothers, two identical twins. Each of them independently of the other measured 200 times the same interval. The exact length of the interval was known to me but not to them. The errrors of the first brother were $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$ and of the second $y_1, y_2, \ldots, y_{200}$. These errors are given to the students. They are taken from the RAND- Table of 100 000 normal deviates. The students construct two histograms, one for each brother, and they plot the points (x_i, y_i) in the plane. Now they make observations. Both histograms look like Figure 17. The points (x_i, y_i) in Figure 18 are distributed around the origin with no preferred direction (rotational symmetry). In addition they are told that thousands of people made repeated measurements and they always got a histogram of roughly the shape of Figure 17.

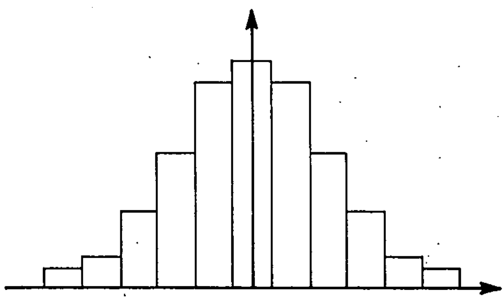


Fig. 17.

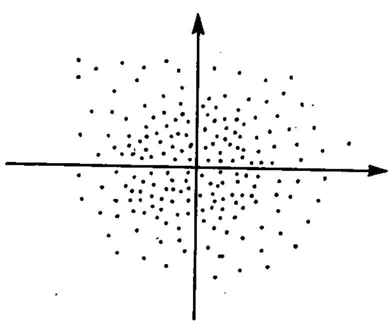


Fig. 18.

b) *Mathematization.*

Let us try to explain this. Let us assume that there exists a density function φ, such that $\varphi(x)\, h + o(h)$ is the proportion of errors lying in the interval $[x, x + h]$. This density φ will in general be dif-

ferent for different persons, but identical twins should have identical densities. We try to characterize φ in the case of the two brothers by a set plausible axioms.

Axiom I. The errors x_i and y_i have equal densities φ.
Axiom II. The errors x_i and y_i are independent.
Axiom III. The joint error density at (x, y) depends only on $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (rotational symmetry).

c) *Deduction.*

(We ignore from now on the little o's.)

By axioms I and II the proportion of errors lying in the shaded rectangle of Figure 19 is

$$\varphi(x) \cdot h \cdot \varphi(y) \cdot k \tag{11}$$

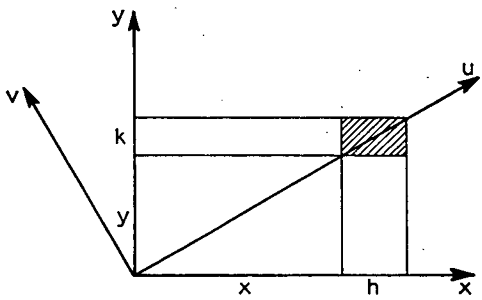


Fig. 19.

We rotate the axes so that the u-axis goes through the point (x, y). In the new (u, v)-system the point (x, y) has coordinates $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$. Hence by axiom III the fraction of the errors lying in the shaded rectangle can also be expressed by

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \varphi(0) \cdot h \cdot k \tag{12}$$

Equating (11) and (12) we get the functional equation

$$\varphi(x)\, \varphi(y) = \varphi(0)\, \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

or

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} \frac{\varphi(y)}{\varphi(0)} = \frac{\varphi(\sqrt{x^2 + y^2})}{\varphi(0)}$$

By setting $\varphi(x)/\varphi(0) = f(x)$ we have $f(0) = 1$ and

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)\, f(y) \tag{13}$$

If we put $y = 0$ in (13) we get $f(\sqrt{x^2}) = f(x)$. Hence (13) can be written

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(\sqrt{x^2})\, f(\sqrt{y^2})$$

Let us introduce $g = f \circ \sqrt{}$. Then (14) becomes

$$g(x^2 + y^2) = g(x^2)\, g(y^2).$$

But this is functional equation (2) whose solution we know to be

$$g(x^2) = e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

By inverting the series of transformations we finally get

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

To find $\varphi(0)$ we use the fact that the total area under the density curve must be 1. First let $\sigma = 1$. Figure 20 shows the graph of $y = e^{-x^2/2}$. By the trapezoid method the area under the curve for $|x| \leq 4$ is found to be about 2.5. Now we find a bound for the area F of the infinite tails for $|x| > 4$. For $x > 4$ we have $e^{-x^2/2} < e^{-2x}$.

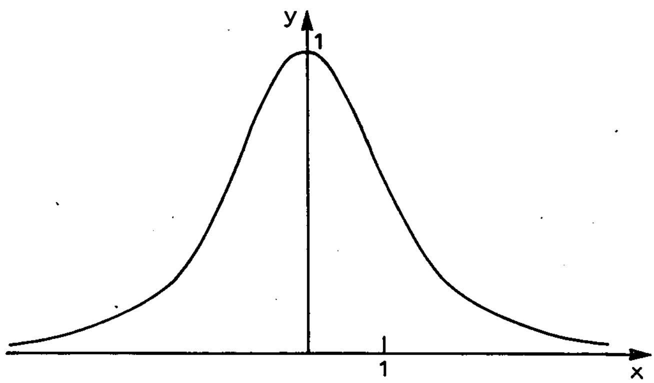


Fig. 20.

Let G be the area under $y = e^{-2x}$ from $x = 4$ to infinity. Then $F < 2G$. An upper sum for G is

$$\sum_{n=0}^{\infty} h\, e^{-2(4+nh)} = \frac{h\, e^{-8}}{1 - e^{-2h}} = \frac{h\, e^{-8}}{1 - 1 + 2h + o(h)} = \frac{e^{-8}}{2 + o(h)/h}$$

This goes to $G = \frac{1}{2}e^{-8}$ for $h \to o$. Hence $F < e^{-8} < 10^{-3}$ and the contribution of the infinite tails can be neglected. Since the total

area below $y = e^{-x^2/2}$ is 2.5 [1]), the density curve for $\sigma = 1$ is

$$\varphi(x) = 0.4\, e^{-x^2/2} \tag{14}$$

The mapping $(x, y) \to (\sigma x, y/\sigma)$ does not change areas and it transforms (14) into

$$\varphi(x) = \frac{0.4}{\sigma}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$$

which is the error density for arbitrary σ.

d) *Application*

The curve (15) fits the histograms of the twins in Figure 17 remarkably well. The results are further applied to measurements made by the students themselves and by others.

At this stage the students cannot yet realize the full significance of the error curve. To gain more insight the central limit theorem for the binomial case is derived. The approximations (4) and (5) are sufficient for this purpose. Now the ubiquity of the error law can be explained intuitively.

The most spectacular application of the four step procedure is the derivation of the Poisson distribution as a stochastic process. But this requires some calculus. At this stage the Poisson distribution must be derived as a limit of the binomial distribution.

Naschrift van de Redactie.

Dr. Engel hield een voordracht over dit onderwerp voor de Jaarvergadering van Wimecos op 28 dec. 1967. De hier boven afgedrukte tekst is die van zijn voordracht op het I.C.M.I.-colloquium dat te Utrecht van 21—25 augustus 1967 werd gehouden.

Een volledig verslag van de overige op dit colloquium gehouden inleidingen vindt men in het eerste nummer van het nieuwe tijdschrift *Educational Studies in Mathematics*, dat onder redactie van Prof. Dr. H. Freudenthal bij uitgeversmaatschappij D. Reidel te Dordrecht verschijnt.

---

[1]) The exact value is $\sqrt{2\pi} = 2.5066$. But this is a mere curiosity and can be found later by calculus.

VOORZICHTIG MET VENN-DIAGRAMMEN?

door

F. GOFFREE

Hengelo (O)

Bij het begin van de nieuwe cursus in augustus zullen vele collega's zich voor het voldongen feit geplaatst zien de wiskunde te introduceren via beschouwingen over verzamelen en verzamelingen. Daarom acht ik het van groot belang dat collega Van Dormolen zijn ervaringen met deze materie op een eerlijke wijze heeft bekend gemaakt.[1]) Het publiceren van dergelijke notities kan ons straks, als de verschillende brugklassen onder leiding van m.a.v.o.-, h.a.v.o.- en v.w.o.leraren van start zijn gegaan, heel goed van pas komen! Zowel in scholengemeenschappen als in gemeenschappen van scholen (als ook in nog minder samenhangende onderwijsinstituten) moet men trachten t.a.v. de wiskunde van meet af aan dezelfde taal te spreken. Indien mogelijk moet men zich hierbij niet beperken tot het gebruik van alleen maar dezelfde symbolen of tot het uniforme taalgebruik binnen enige scholen. In beide gevallen is het wenselijk de zaak ruimer op te vatten. Voor mij is dit de aanleiding enige opmerkingen te plaatsen bij het artikel van Van Dormolen. Ik put hierbij uit mijn ervaringen met deze leerstof bij lessen aan leerlingen met alle mogelijke Ulodiploma's, aan kwekelingen en . . . aan leerlingen van verschillende klassen van de lagere school.

1. (Euclides bladz. 278) ,, . . . dat ik Venndiagrammen in de zojuist beschreven situaties van eindige verzamelingen met vrucht zou kunnen gebruiken. Maar deze situatie komt zo weinig voor, dat ik, als het te pas komt, best even een lijntje kan trekken zonder *er verder een woord aan vuil te maken* . . ." [2])

Als ik het goed begrijp gaat het hier om het woord *Venndiagram*. In de aanvang van het artikel kreeg ik al deze indruk. En hoewel Van Dormolen hierop later terugkomt, begint hij in zijn lessen te *vertellen wat een Venndiagram is, wat een verzameling is, wat een element is*. Afgezien van het feit dat de volgorde anders zou kunnen zijn, verbaast mij het meest dat de leerlingen niet aan het woord komen.

---

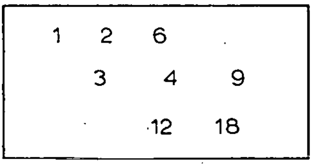
[1]) Zie Euclides, **43**, juni 1968, p. 273.

[2]) Cursivering in alle citaten van F.G.

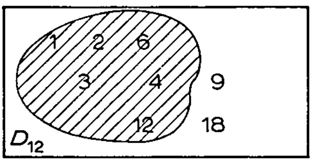
In hoeveel opzichten zijn zij al met verzamelingen in aanraking gekomen? Ik vermoed dat onze leerlingen in de brugklas met heel wat interessant materiaal voor de dag kunnen komen als het over verzamelen gaat. Noteer een aantal van die verzamelingen, kies een geschikte er uit om het gesprek voort te zetten, bespreek van vele objecten of het al dan niet elementen van die verzameling zijn en kom dan gezamenlijk tot het onder woorden brengen van de *karakteristieke eigenschap,* die de elementen bij elkaar doet behoren. Laat de leerlingen het wel of niet eindig zijn van de verzameling ervaren en onder woorden brengen, en ... zet tenslotte een lijntje om de elementen, die op het bord staan en die de karakteristieke eigenschap bezitten.

In de vijfde klas van een lagere school gaan de kinderen delers „verzamelen". De delers van 12 zijn 1, 2, 3, 4, 6 en 12. De delers van 18 zijn 1, 2, 3, 6, 9 en 18. We maken een afspraak: de verzamelingen delers heten D_{12} en D_{18}. We schrijven de elementen er van tussen accoladen: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

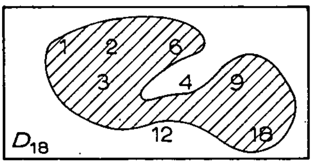
$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$



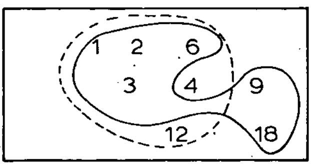
Hiernaast zie je nogmaals alle delers van 12 of 18.



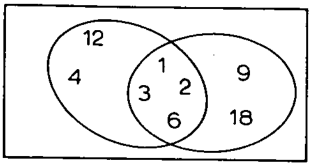
Welke zijn de delers van 12?



En welke de delers van 18?



Je kunt dat ook in één figuur laten zien.



En mooier wordt het als je het zo doet.

We laten op deze wijze de kinderen ervaren dat er een karakteristieke eigenschap is die de verschillende objecten verwant doet zijn: het worden zodoende de elementen van dezelfde verzameling. Het Venndiagram (het lijntje er omheen) vertegenwoordigt de karakteristieke eigenschap, is tegelijkertijd een abstrahering en concretisering er van!

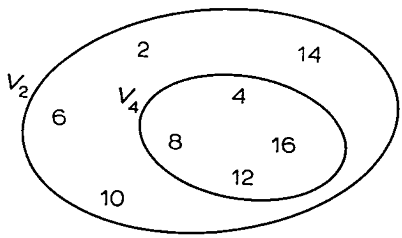
Het Venndiagram wordt zodoende een *didactisch hulpmiddel*, dat niet te versmaden is. Op deze manier gezien kunnen we op een zeker ogenblik het Venndiagram uit onze beschouwingen weglaten, terwijl sommige kinderen eventueel nog op het niveau van het diagram kunnen terugvallen.

In een volgende les gaan de kinderen veelvouden verzamelen. Het is mogelijk gebleken dat de vijfdeklassertjes de oneindigheid ervan zelf ontdekken en bovendien kunnen zeggen waarom dat zo is.

De verzameling tweevouden heet V_2. We schrijven dan:

$V_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ En ook:

$V_4 = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$ Alle elementen van de verzameling V_4 hebben ook de karakteristieke eigenschap van V_2 (deelverzameling).



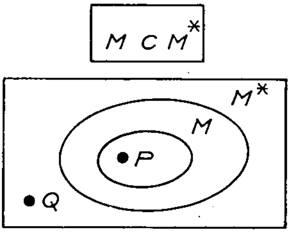
Ook deze situatie kunnen we aanschouwelijk laten verwerken in een Venndiagram: We kunnen niet alle elementen noteren, want de verzamelingen zijn oneindig. Dit laatste accentueerden we o.a. met vragen als: „Noteer een element van V_4 dat groter is dan 10.003" en „Zet het getal 50.000.042 in de juiste verzameling".

Opm. De definitie van de g.g.d. van a en b als grootste element in de doorsnede van D_a en D_b werd door de leerlingen uiteindelijk zelf opgesteld!

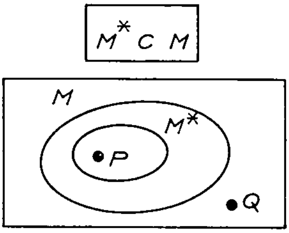
Dat men Venndiagrammen als didactisch hulpmiddel kan beschou-

wen moge ook nog blijken uit het volgende voorbeeld. We nemen het bewijs van de stelling, die Van Dormolen in zijn samenvatting op bladz. 278 noemt: De verzameling punten, die gelijke afstanden hebben tot twee vaste punten A en B, is het middelloodvlak van het lijnstuk AB.

Men moet aantonen dat de verzameling punten (M) van het middelloodvlak (loodrecht op AB en door het midden van AB) een deelverzameling is van de verzameling punten (M^*), die gelijke afstanden hebben tot A en B; en omgekeerd.



Hier mogen we een keus maken:
1) $P \in M \Rightarrow P \in M^*$ of
2) $Q \notin M^* \Rightarrow Q \notin M$



Hier ook:
1') $P \in M^* \Rightarrow P \in M$
2') $Q \notin M \Rightarrow Q \notin M^*$

De leerling kan nu weloverwogen een van de vier juiste combinaties kiezen. (De gelijkwaardigheid van de contrapositie blijkt uit het diagram.) Merk op dat men op dit niveau er geen behoefte aan heeft om de elementen van de verzameling in het Venndiagram te zetten.

2. (Bladz. 274, 277)

Bij het laten functioneren van het begrip ,,lege verzameling'' moet men inderdaad voorzichtig te werk gaan. Van Dormolen voorziet moeilijkheden bij het tekenen van de lege verzameling, daar ,,je niet moet proberen zichtbaar te maken wat er niet is''. Pas op!

De lege verzameling is er wel, en zelfs in vele situaties te creëren. De elementen ontbreken echter! De moeilijkheden in het rekenonderwijs op de basisschool met het getal nul ontstaan veelal, doordat de kinderen dit getal vereenzelvigen met *niets*.

$0 \times 8 = 8$ (niets doen met 8)

$8/0 = 8$ (idem)

$5^0 = 0$ (er zijn geen faktoren 5) etc.

De karakteristieke eigenschap is in een dergelijk geval van een lege verzameling zodanig, dat er geen elementen zijn die deze bezitten. Deze eigenschap is er wel, aangegeven door een leeg ovaal, de elementen ontbreken echter. Hiernaast maken we dan ook gebruik van

het symbool ϕ en in het begin liever van { }.

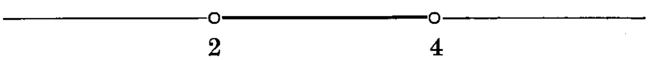
3. Het is verleidelijk om met het gebruik van Venndiagrammen een stuk „populair wiskundig taalgebruik'' in de wiskundeles te halen. Zo lees ik o.a. „dat sommige stukken leeg blijven'' „het leeg laten van een of meer stukken'' (bladz. 275).

Het lijkt mij van essentieel belang dat de leerlingen, o.a. met behulp van het onderzoeken van verzamelingen, van meet af aan een exact gebruik van de taal leren. Eigenlijk moeten de kinderen zo spoedig mogelijk ervaren (liefst al op de basisschool!) dat de wiskunde een taal apart is, waarin vaagheden en meerduidigheid geen plaats hebben. De mathematische betekenis van de verschillende logische begrippen (en, of, als-dan, dan, of-of, noch-noch) moet in de wiskundeles in ere worden gehouden. Hierbij kan het gebruik van Venndiagrammen een gunstige invloed hebben. Mogen de leerlingen van de basisschool aanvankelijk een stuk touw nodig hebben om de elementen van hun verzamelingen bijeen te houden, voor onze brugklassers lijkt me dit overbodig, ja zelfs ongewenst (bladz. 277).

4. Evenals het Venndiagram een aanschouwelijk (schematisch) hulpmiddel is bij het bestuderen van verzamelingen en van hetgeen daarmee samenhangt, is ook de getallenrechte een dergelijke *didactische* vondst. In beschouwingen ter inleiding van de analyse maakt men hiervan vaak gebruik, later heeft de student ze niet meer nodig! De op bladzijde 278 genoemde verzameling

$$V = \{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x < 4\}$$

kan men „aanschouwelijk'' maken op de getallenrechte:



Deze aanschouwelijkheid hebben vele leerlingen na verloop van tijd ook niet meer nodig. Toch biedt deze schematisering bij het oplossen van verschillende volgende problemen een goede steun. Op dezelfde wijze zou ik het gebruik van Venndiagrammen willen zien. De leerlingen moeten in staat worden gesteld dit niveau van aanschouwelijkheid te ontgroeien. Wij moeten proberen hiervoor een goede methode te ontwikkelen . . .

KORREL CXLV

Uit de klassepraktijk

In een onbewaakt ogenblik gaf ik laatst het volgende vraagstuk voor huiswerk op zonder de redactie daarvan te moderniseren (Richters, *Diff.- en Integr.rek. I*,1):

Voor welke waarden van a is de functie

$$x^3 + ax^2 + ax + 1$$

een stijgende functie?

Enkele dagen later werd me dit antwoord gepresenteerd:

Deze functie is stijgend voor alle waarden van a of voor geen enkele waarde van a. Het eerste geval treedt op als $x < -1$ of $x > 0$; het tweede geval treedt op als $-1 \leqq x \leqq 0$.

Na enige studie en wat overleg met de afzender van deze donderslag uit heldere hemel heb ik dit antwoord onvoorwaardelijk goed moeten keuren. Hij had een lineaire functie van a in gedachten gehad, met x als parameter . . .

Naar aanleiding van dit kleine voorvalletje wil ik graag een paar opmerkingen maken.

Mijn eerste reactie bij het bestuderen van het onverwachte antwoord en deszelfs rechtvaardiging was „Hoe komt de man op dat dolle idee". Nu weet ik uit ervaring dat hij op het gebied van de wiskunde op geen enkel idee komt, dat niet door mij geïmporteerd is in zijn brein. De conclusie ligt nu voor de hand. Met gepaste zelfcritiek verklaar ik daarom plechtig, dat ik me in de klas nog al eens schuldig gemaakt heb aan slordige uitspraken zoals

Voor (of bij) welke waarden van x is $f(x)$ stijgend?

Natuurlijk had ik moeten zeggen in die situaties

In welke intervallen is $f(x)$ stijgend?

Zo staat het ook in het (rode) boekje van Richters, nietwaar! Het gevolg van deze slordigheid is nu geweest, dat mijn leerling als volgt redeneerde:

Dit keer vraagt hij niet, voor welke waarden van x die functie stijgend is, maar voor welke waarden van a dat het geval is. Nou zal het dus wel een functie van a zijn.

En wie ben ik, dat ik hem dat zou mogen kwalijk nemen?

Ziezo, deze nederigheid heeft mij het recht om mee te praten weer terug gegeven. Als tweede opmerking wil ik nu iets van meer algemene strekking poneren: in onze leerboeken wordt niet veel gedaan om het verschil tussen een variabele en een parameter duidelijk te maken; de recente ontwikkelingen in ons vak maken dat echter wel nodig.

In de analytische meetkunde tref ik nog de meest bevredigende toestand aan. Daar wordt vrij algemeen het gebruik van een parameter geassocieerd met het hanteren van een „stelsel". In een eindexamenvraagstuk uit 1968 staat bijvoorbeeld: een stelsel parabelen is gedefinieerd door de vergelijking $y^2 + py - 2x = 0$.

Natuurlijk wordt dat stelselmatige gestelsel wel in de hand gewerkt door de aard van de vragen. Als er geen verzameling gevraagd wordt, dan staat er wel „Welke exemplaren van het stelsel hebben die en die eigenschap". Echter . . . in de algebra ligt de zaak eigenlijk precies eender. In wezen hebben we niet te maken met *de* functie $x^3 + ax^2 + ax + 1$, maar met een stelsel of verzameling functies die allemaal hetzelfde bouwschema hebben. En nu we de verzamelingentaal moeten gaan gebruiken, krijgen we een mooie kans om dat duistere parametergedoe in de algebra wat doorzichtiger te maken. Ik pleit dus voor een ruim gebruik van woorden als (geïndiceerde) verzameling, bouwschema, schemaletter in dit soort vraagstukken. Als voorbeeld stel ik de volgende redactie voor van het vraagstuk, dat de aanleiding was tot het maken van deze opmerkingen:

We beschouwen de functies, die gebouwd zijn volgens het schema

$$f_a : x \to x^3 + ax^2 + ax + 1.$$

Welke functies uit deze verzameling zijn stijgend?

Het antwoord zou nu kunnen luiden:

$$f_a \text{ is een stijgende functie} \Leftrightarrow 0 \leqq a \leqq 3.$$

's-Gravenhage A. van Tooren

BOEKBESPREKING

Resonans, Algemeen onderwijsblad waarin opgenomen *Valcooch*, Wolters-Noordhoff, Groningen, *f* 10,— per jaargang.

Dit nieuwe maandblad beoogt belangstelling te wekken voor de grote gevarieerdheid van problemen, die in ons land met zijn ongeveer 200 onderwijsperiodieken de belangstelling van autoriteiten, lerarenorganisaties, pedagogische centra, enz. hebben. Het blad wil verbindingen leggen tussen de onderscheiden onderwijssectoren èn tussen onderwijs en maatschappij.

Het is niet toevallig, dat een blad als dit, dat streeft naar voorlichting voor een zo breed mogelijk lezerspubliek, juist dit jaar verschijnt. 1968 toch zou kunnen worden gekarakteriseerd als het jaar waarin het streven naar schotjes-opruiming op tal van gebieden vastere vorm krijgt. Het meest sprekende voorbeeld van dit streven is uiteraard de inwerkingtreding van de Mammoetwet die immers een ,,samenhangend geheel van onderwijsvoorzieningen" tracht te brengen. In de lerarenwereld zien we met ingang van de nieuwe cursus, dat de lerarenverenigingen hun vier weekbladen tot één hebben doen samensmelten, waardoor ze het over de omgrenzing van de eigen groepering heenzien bevorderen.

Ook internationaal kan men analoge symptomen aanwijzen. Zo heeft in Frankrijk het ,,Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public", een didactisch maandblad van niveau, sinds enige tijd de suggestieve ondertitel ,,*de la Maternelle aux Facultés*".

Heeft het zin bij de lezers van *Euclides*, maandblad voor de didactiek der wiskunde, speciale aandacht te vragen voor *Resonans*?

Naar mijn mening wel. In zijn dit jaar verschenen proefschrift ,,*De katholieken en hun Onderwijs*" onderscheidt dr. van Kemenade tweeërlei leraarstype. Het ene type, het pedagogische, streeft allereerst naar een deskundige opvoeding van de leerlingen, het andere wenst als wetenschapsbeoefenaar het accent te leggen op vakbekwaamheid en vak-technisch inzicht. Het is duidelijk dat in de leraar beide tendenties tot hun recht dienen te komen. Van Kemenade concludeerde nu tot mijn verrassing dat de ,,pedagogische rol-opvatting" bij de docenten in de natuurwetenschappen frequenter voorkomt dan bij de literaire docenten. De wiskundedocenten zijn hierbij niet ingedeeld, maar toch zie ik in Van Kemenades constatering een aanwijzing, dat ook in de kringen van de lezers van *Euclides* een ruime belangstelling voor *Resonans* zal kunnen bestaan.

Joh. H. Wansink

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING
op maandag 23 december 1968 in ,,Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht.

Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering 1967.*
3. Jaarverslagen.
3.1. Van de secretaris.*
3.2. Van de penningmeester.
3.3. Van de kascommissie.*
3.4. Van de commissie voor de leesportefeuille.*
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing.
6. Vaststelling van de contributie voor 1969/1970.
7. Voorstel tot statutenwijziging in verband met de wet op het voortgezet onderwijs.
8. Voordracht van Prof. dr. N. G. de Bruyn over ,,*Computerwiskunde op school*".

Pauze.

9. Voordracht van drs. R. Sattler over ,,*Vectormeetkunde*''.
10. Rondvraag.
11. Sluiting.

* Publikatie hiervan zal geschieden in het decembernummer van ,,Euclides''.

N.B. Deze mededeling is een voorlopige convocatie van Wimecosleden. Zij kunnen tot uiterlijk 15 november a.s. agendapunten voorstellen aan de secretaris, Bosboomstraat 20, Arnhem.

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE W.V.O.

De Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs organiseert op 14 en 15 december 1968 een weekendconferentie in het conferentieoord ,,Woudschoten'' te Zeist over ,,*Modernisering van de wiskunde op de basisschool*''.

De heren F. Goffree, B. van der Krogt en E. J. Wijdeveld zullen spreken over:

1. Waarom wiskunde op de basisschool en wat gebeurt er reeds in het buitenland?
2. Wat kunnen we in Nederland doen in aansluiting op de modernisering bij het voortgezet onderwijs?
3. Welke consequenties heeft modernisering t.a.v. de nieuwe programma's bij het voortgezet onderwijs?

De Heer Dr. P. M. van Hiele spreekt over:

Kan men invoering van nieuwe wiskundige begrippen onbeperkt vervroegen?

Daarna groepsdiscussies.
Samenvatting daarvan door Dr. W. J. Brandenburg. Algemene discussie en conclusies.
Opening 14 dec. 15 uur; sluiting 15 dec. 16.30 uur.

Kosten voor leden, resp. niet leden:

Gehele weekend inclusief logies	*f* 27,50	(*f* 32,50).
Idem exclusief logies en ontbijt	- 22,50	(- 27,50).
Deelname voor één dag	- 12,50	(- 15,—).

Opgave zo spoedig mogelijk aan de secretaris, drs. H. C. Vernout, Van Nouhuysstraat 11, Haarlem, tel. 023-57288 onder gelijktijdige storting van het bedrag op giro 26 10 36 t.n.v. penningmeester W.V.O.-wiskunde werkgroep te Voorburg. Zij, die zich per 1 jan. a.s. als lid van de werkgroep opgeven kunnen tegen ledenprijs deelnemen. Docenten ontvangen reiskostenvergoeding op basis 2e-klas trein. Alle verdere inlichtingen over de Werkgroep bij de secretaris: Na opgave ontvangt men een uitgebreid programma.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

206. Een rij natuurlijke getallen wordt als volgt bepaald:

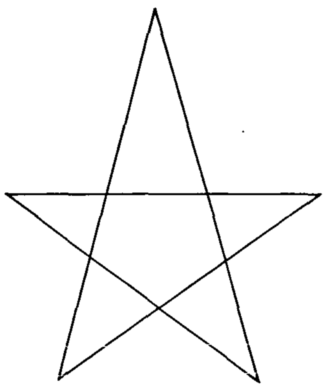
$$t_1 = 2,\ t_2 = 3,\ t_3 = t_1 \cdot t_2 = 6;$$

nu is $t_2 \cdot t_3 = 18$ en daarom kiezen we

$$t_4 = 1,\ t_5 = 8;\ t_6 = t_3 \cdot t_4 = 6, \ldots$$

Gevraagd worden de rangnummers van de eerste term, die gelijk is aan 4, aan 5, aan 7, aan 9. (ingezonden door P. Bronkhorst, auteur H. Steinhaus)

207. Hieronder is een regelmatige vijfster getekend. Zoals men door tellen kan nagaan, komen in deze figuur 16 convexe veelhoeken voor. Teken nu analoog een regelmatige elfster en ga na, hoeveel convexe veelhoeken in de figuur voorkomen. (B. Kootstra)



OPLOSSINGEN

204. Gevraagd werd op te lossen de differentiaalvergelijking $y^2y' = x^2 - 2x$. Hoewel $x = 2$, $y = 0$, $y' =$ willekeurig voldoet, gaan door (2, 0) niet onbegrensd veel integratiekrommen. Hoe zit dat?

Lijnelementen voldoen alleen aan een differentiaalvergelijking, voorzover ze raken aan een integratiekromme. Het is zinloos zonder meer te zeggen, dat een lijnelement aan de vergelijking voldoet. De oplossing van de vergelijking is

$$y = \sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + c)}.$$

De enige integratiekromme door (2, 0) is dus de grafiek van

$$y = \sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)}.$$

Deze kromme levert in (2, 0) het lijnelement, dat loodrecht op de x-as staat. De overige gevonden lijnelementen zijn slechts „loze" lijnelementen.

Aanschouwelijk kan men dit ook als volgt inzien. Neem b.v. het lijnelement $x = 2$, $y = 0$, $y' = 1$. Ga een minuscuul eindje langs dit lijnelement naar rechts boven. Dan springt y' op „heel groot" en wel des te groter naarmate het eindje „minusculer" was. Dus kan uit het lijnelementje geen continu verlopende kromme resulteren.

205. Onder $S(x)$ verstaan we de som van de cijfers van x. Wat is de kleinste natuurlijke waarde van n, die op een 5 eindigt en waarvoor de vergelijking $x + S(x) = 10^n$ vals is?

Onderstel $n = 4$ en x is het getal $abcd$ (a, b, c, d zijn de cijfers van het getal). Stel $a_1 = 9 - a, \ldots, d_1 = 9 - d$. Dan moet

$$a_1 10^3 + b_1 10^2 + c_1 10 + d_1 + 1 = 9 - a_1 + 9 - b_1 + 9 - c_1 + 9 - d_1,$$
$$a_1 \cdot 1001 + b_1 \cdot 101 + c_1 \cdot 11 + d_1 \cdot 2 + 1 = 9 \cdot 4,$$

waarin 4 de gekozen waarde van n is.

Dus zal n een valse vergelijking opleveren, dan en alleen dan als $9n$ niet te schrijven is in de vorm:

$$1 + p_1 \cdot 2 + p_2 \cdot 11 + \ldots + p_k \cdot 100\ldots01.$$

We schetsen nu het resterende deel van de oplossing. De getallen, die niet in bovenstaande vorm te schrijven zijn, zijn:
2, 4, 6, 8, 10 (die verder niet voor ons van belang zijn), 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 122 (= 101 + 21), . . .
Al deze getallen vanaf 21 zijn te schrijven in de vorm

$$21 + q_1 \cdot 11 + q_2 \cdot 101 + \ldots \tag{1}$$

Hierin zijn alle getallen q_i hoogstens 9. Niet al deze getallen voldoen. Zo voldoet b.v. niet $21 + 9 \cdot 11$, omdat $21 + 9 \cdot 11$ geschreven kan worden $101 + 9 \cdot 2 + 1$. Daarom mag q_1 hoogstens gelijk aan 8 zijn. Voor ons doel is niet nodig systematisch alle verdere beperkingen op te sporen.

Onze taak is nu de getallen q_i zo te bepalen, dat (1) door 9 deelbaar is en op een 5 eindigt en bovendien minimaal is. Dan moet

$$3 + 2(q_1 + q_2 + \ldots) \text{ deelbaar door 9 zijn,}$$
$$1 + (q_1 + q_2 + \ldots) \text{ op een 5 eindigen.}$$

De kleinste waarde, die we hieruit voor $q_1 + q_2 + \ldots$ vinden, is 84. Dit levert, als we het getal zo klein mogelijk willen houden, $q_1 = 8$, $q_2 = 8$ (en geen 9 om redenen analoog aan die, waarom q_1 niet gelijk aan 9 kan zijn). Dan $q_3 = q_4 = \ldots = q_9 = 9$ en ten slotte $q_{10} = 5$. Hieruit volgt $9n = 21 + 88 + 808 + 9009 + \ldots + 50000000005 = 59999999985$ en dus $n = 6666666665$.

KALENDER

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*" in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-Oost op woensdag 27 november 1968, aanvang 20.00 uur:

Prof. Dr. B. L. J. Braaksma: Orthogonale veeltermen en bolfuncties.

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Vrijdag 3 januari 1969: bijeenkomst te Wageningen. Nadere mededelingen in in het decembernummer.

Prof. Dr. S. Wiegersma

en Dr. M. Groen

Resultaten van wiskunde-onderwijs

Empirische studies over onderwijs 8

XII + 142 blz. f 13,50

Een verslag van het internationale onderzoek naar de wiskunde-prestaties van 13- en 17-jarige leerlingen van verschillende onderwijsinstellingen. Aan de orde komen successievelijk het 'International Educational Achievement Project', het Nederlands onderwijs in internationaal kader, verschillen tussen schooltypen in Nederland, sociale factoren en leerprestaties, de eindexaminandi VHMO, opinies en attitudes per schooltype, en opinies en attitudes en wiskunde-prestaties

Wolters-Noordhoff